

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 03/02/14

- (1) Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, tali che $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g = 1$. Posto

$$F(x, y) = f(x - y)g(x + y)$$

stabilire se F è integrabile su \mathbb{R}^2 , e se sì, calcolarne l'integrale.

- (2) Sia μ^* la misura esterna di Lebesgue su \mathbb{R}^n , sia $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mu^*(E) < \infty$. Provare che E è μ^* -misurabile se e solo se

$$\mu^*(E) = \sup \{ \mu^*(C) \mid C \text{ chiuso}, C \subset E \} .$$

- (3) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili q.o. finite su uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) , tale che $f_n \rightarrow f$ in misura, con f misurabile q.o. finita. Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $|F'(t)| \leq 10$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Stabilire se

$$F(f_n) \rightarrow F(f) \text{ in misura} .$$